2. Die Feldgleichungen bleiben aber auch dann invariant (eine Forderung, die man vernünftigerweise an jede Feldtheorie stellen muß), wenn L nach der Verallgemeinerung der Feldgrößen und damit des Transformationsgesetzes zwar *nicht*invariant ist, aber δL von der Form einer reinen Divergenz ist [1], also $\delta L = Q^{\sigma}{}_{,\sigma}$ mit beliebigem Q ist. In diesem Fall möge sich L von einer invarianten LAGRANGE-Dichte um eine Funktion S unterscheiden, so daß also für $L+S$ die obige Invarianzbeziehung (3) gilt:

$$\delta(L+S) + [(L+S)\,\zeta^{\sigma}]_{,\sigma} = 0 \quad (\text{mit } \delta L = Q^{\sigma}{}_{,\sigma}). \tag{4}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Das Glied S habe ebenfalls die Form einer reinen Divergenz: $S = s^{\varrho}{}_{,\varrho}$. Man kann dann die starken Erhaltungssätze und die zugeordneten Identitäten wieder ohne weiteres ableiten [4]. Die Übereinstimmung zwischen den ursprünglichen und den verallgemeinerten starken Erhaltungssätzen und Identitäten wird aber nicht so eng sein wie in dem Falle [1], wo L eine skalare Dichte war, denn nun treten Glieder in S^{ϱ} in diesen verallgemeinerten Beziehungen auf. Aber sie enthalten ebenfalls noch dieselben Feldgleichungen L^{A}.

b) Der allgemeinere Fall, wenn das Glied S, um das sich L von einer invarianten Dichte unterscheidet, *nicht* die Form einer Divergenz hat, erfordert eine etwas tiefere Untersuchung. Zunächst folgt aus dem Transformationsgesetz für die invariante Dichte (4), daß

$$\delta S = -Q^{\sigma}{}_{,\sigma} - [(L+S)\,\zeta^{\sigma}]_{,\sigma} = R^{\sigma}{}_{,\sigma}.$$

Also transformiert S auch wie L als $\delta S = R^{\sigma}{}_{,\sigma}$. Dieses bedeutet natürlich, daß S mit L auf gleicher Stufe als eine LAGRANGE-Funktion steht, die die Feldgrößen Ψ_{A} und ihre Ableitungen enthält. Dann kann man also diesen Fall durch zwei Variationsprinzipien beschreiben, nämlich:

$$\int L^{A}\,\delta\Psi_{A}\,d_4x = 0 \quad \text{und} \quad \int S^{A}\,\delta\Psi_{A}\,d_4x = 0,$$

welches erfordert, wenn die willkürlichen $\delta\Psi_{A}$ an der Grenze verschwinden, daß

$$L^{A} = 0 \quad \text{und} \quad S^{A} = 0.$$

In diesem Fall haben wir also auch noch dieselben Feldgleichungen L^{A}, aber zusätzlich treten die Feldgleichungen S^{A} auf. Da die starken Erhaltungssätze und die zugeordneten Identitäten von dem Transformationsgesetz (4) für die invariante Dichte abgeleitet werden [4], welches L und S enthält, werden $L^{A} + S^{A}$ in den verallgemeinerten Erhaltungssätzen auftreten. Hierdurch sehen wir, daß sich die ursprünglichen Erhaltungssätze und Identitäten stark von den verallgemeinerten Beziehungen unterscheiden werden, da in den letzteren bestimmte völlig neue Elemente in die Theorie eingeführt wurden, was z. B. durch das Auftreten von S^{A} ausgedrückt wird. (Der spezielle Ausnahmefall $S^{A} = L^{A}$ ist natürlich uninteressant.)

Eine Verallgemeinerung der Feldgrößen für eine gegebene LAGRANGE-Funktion, die das obige Resultat zur Folge hat, dürfte einen Weg andeuten, auf dem man eine weitere neue Struktur in ein Theorie einführen kann. Die so verallgemeinerte Theorie wird aber bestimmt im allgemeinen stark von der ursprünglichen abweichen. Wenn man also den größten Teil der einer gegebenen Feldtheorie unterliegenden Struktur beizubehalten wünscht, ist die mögliche Allgemeinheit der Feldgrößen (und daher der betrachteten Transformationsgesetze) auf die beschränkt, die die LAGRANGE-Funktion in einer Form belassen, die von einer invarianten Dichte höchstens durch ein Glied abweicht, das eine reine Divergenz ist (außer dem oben erwähnten Spezialfall, wenn $S^{A} = L^{A}$).

Herrn Professor Dr. G. BURKHARDT danke ich für wertvolle Diskussionen.

Zur kosmologischen Zeitskala

Von C. CARSTENS/HILBIG *

(Z. Naturforschg. **12 a**, 659—660 [1957]; eingegangen am 16. April 1957)

Bei Betrachtungen über Beziehungen zwischen mikrophysikalischen und kosmischen Naturkonstanten ist schon von JORDAN [1] auf die Bedeutung der EDDINGTON-Zahl hingewiesen worden. Besonders klar werden die Verhältnisse, wenn der EDDINGTON-Zahl Z, also dem Quotienten aus elektrischer Anziehung und Gravitationsanziehung von Proton und Elektron, eine andere Bedeutung beigelegt wird. Z kann auch interpretiert werden als das Verhältnis zweier atomarer Längen, bzw. als eine bestimmte ganz besonders ausgezeichnete Anzahl von Protonen, da auch der Quotient aus der Elementarlänge $l = e^2/m_e c^2$ und dem Gravitationsradius $r_g = f\,m_{pr}/c^2$ des Protons gleich Z ist. Also bedeutet Z diejenige Anzahl von Protonen, deren Gesamtmasse einen Gravitationsradius hat, der gerade gleich der Elementarlänge l ist. So wird unmittelbar verständlich, warum im Fall positiver Raumkrümmung eine Beziehung zwischen dem Gravitationsradius R_{gr} der gesamten Weltmasse M, der Protonenanzahl $N_{pr} = M/m_{pr}$, l und Z besteht:

$$R_{gr}/l = N_L = N_{pr}/Z.$$

Aus $l = Z\,r_g = Z \cdot f\,m_{pr}/c^2$ folgt $m_{pr} = l\,c^2/f\,Z$ und damit für die COMPTON-Wellenlänge λ_p des Protons

$$\lambda_p = h/m_{pr}\,c = h\,f\,Z/l\,c^3 = 2\,\pi\,r_{\lambda},$$

wenn $r_{\lambda} = \lambda_p/2\,\pi$ gesetzt wird. Für den statischen EINSTEIN-Kosmos mit $e = 1$ gilt

$$V = 2\,\pi^2\,R_e^3; \quad M\,f/c^2 = R_{gr} = \pi/2 \cdot R_e.$$

Bedeutet σ die mittlere Dichte im Kosmos, so wird

$$M = 2\,\pi^2\,R_e^3 \cdot \sigma = \pi\,c^2\,R_e/2\,f \quad \text{oder} \quad R_e^2 = c^2/4\,\pi\,f\,\sigma.$$

Da definitionsgemäß der EINSTEIN-Radius in Lichtsekunden ist: $R_e/c = t$, so folgt $t^2 = 1/4\,\pi\,f\,\sigma$. Die Gesamt-

* Fredelsloh/Northeim, Tönnieshof.

[1] P. JORDAN, Naturwiss. **25**, 513 [1937].

zahl N_{v_0} Elementarvolumina im Kosmos wird bestimmt durch $N_{v0} = V/v_0$, wobei das Elementarvolumen v_0 mit MARCH [2] als ein „kugelförmiges Gebiet von bestimmtem Radius l_0" betrachtet wird. Setzt man $v_0 = 4/3 \cdot \pi\, l^3$, so wird: $N_{v0} = 12\, R_{\mathrm{gr}}{}^3/\pi^2\, l^3$. Die Anzahl n_v Elementarvolumina im Kosmos, die gerade ein Proton enthalten:

$$n_v = N_{v0}/N_{\mathrm{pr}} = 12\, R_{\mathrm{gr}}{}^2/\pi^2\, l^2\, Z\,.$$

Damit für das Produkt:

$$r_\lambda\, n_v = R_{\mathrm{gr}}\,[6\, R_{\mathrm{gr}}\, h\, f/\pi^3\, l^3\, c^3]\,.$$

Der Klammerausdruck ist eine dimensionslose Zahl, deren ungefähre Größe mit Hilfe von $R_{\mathrm{gr}}{}^2 = \pi\, c^2/16\, f\, \sigma$ und dem von SCHÜCKING [3] angegebenen unteren Grenzwert von $\sigma = 5 \cdot 10^{-29}$ g/cm³ bestimmt wird zu maximal 1,03. Setzt man nun die dimensionslose Zahl genau gleich 1, dann folgt: $r_\lambda\, n_v = R_{\mathrm{gr}}$. Für diesen Fall ist

$$R_{\mathrm{gr}} = h\, f\, Z \cdot N_{v0}/2\, \pi\, l\, c^3 \cdot N_{\mathrm{pr}}$$

und da $N_{\mathrm{pr}} = M\, f\, Z/l\, c^2$, so besteht die interessante Beziehung

$$M\, c\, R_{\mathrm{gr}} = N_{v0}\, h/2\, \pi\,.$$

Unverkennbar ist die Ähnlichkeit mit der HAASschen [4] Hypothese. Aus dem Ansatz folgt:

$$l^3 = 3\, V\, h/8\, \pi^2\, M\, c\, R_{\mathrm{gr}}$$

und daraus durch Substitution von V, M und R_{gr}:

$$t = \pi^2\, l^3\, c^2/3\, h\, f\,.$$

Auflösung nach f und Substitution von f in der Gleichung für die Masse bzw. für die mittlere Dichte führt zu Beziehungen, die in der folgenden Tabelle zusammen mit den Gleichungen für die anderen Größen wiedergegeben sind.

Neuere amerikanische Untersuchungen sowie von HOUTERMANS ermittelte Meßergebnisse an radioaktivem Material ergeben Alterswerte von $4{,}7 \cdot 10^9$ Jahren. Aus dem astronomisch bestimmten HUBBLE-Faktor wird bei Annahme eines mit Lichtgeschwindigkeit sich dehnenden Universums ein Weltalter von $\sim 5 \cdot 10^9$ Jahren berechnet. Ein weiterer Zusammenhang von mikro- und

$t = \dfrac{\pi^2 l^3 c^2}{3hf}$	$= 1{,}498 \cdot 10^{17}$ sec	$= 4{,}748 \cdot 10^9$ Jahre
$M = \dfrac{3hc}{2\pi l^3} \cdot t^2$	$= 4{,}235 \cdot 10^{21} \cdot t^2$	$= 9{,}728 \cdot 10^{55}$ g
$\sigma = \dfrac{3h}{4\pi^3 l^3 c^2} \cdot \dfrac{1}{t}$	$= 7{,}963 \cdot 10^{-12} \cdot \dfrac{1}{t}$	$= 5{,}318 \cdot 10^{-29}\, \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
$V = 2\pi^2 c^3 \cdot t^3$	$= 5{,}318 \cdot 10^{32} \cdot t^3$	$= 1{,}789 \cdot 10^{84}$ cm³
$N_{\mathrm{pr}} = \dfrac{3hc}{2\pi l^3 m_{\mathrm{pr}}} \cdot t^2$	$= 2{,}532 \cdot 10^{45} \cdot t^2$	$= 5{,}685 \cdot 10^{79}$
$N_{\mathrm{L}} = \dfrac{\pi c}{2l} \cdot t$	$= 1{,}670 \cdot 10^{23} \cdot t$	$= 2{,}503 \cdot 10^{40}$
$\dfrac{N_{\mathrm{pr}}}{N_{\mathrm{L}}} = \dfrac{3h}{\pi^2 l^2 m_{\mathrm{pr}}} \cdot t$	$= 1{,}517 \cdot 10^{22} \cdot t$	$= 2{,}271 \cdot 10^{39}$
$N_{v0} = \dfrac{3\pi c^3}{2l^3} \cdot t^3$	$= 5{,}671 \cdot 10^{69} \cdot t^3$	$= 1{,}907 \cdot 10^{121}$
$n_v = \pi^2 \mu_{\mathrm{pr}} \cdot t$	$= 2{,}239 \cdot 10^{24} \cdot t$	$= 3{,}355 \cdot 10^{41}$
$R_{\mathrm{e}} = c \cdot t$	$= 2{,}998 \cdot 10^{10} \cdot t$	$= 4{,}492 \cdot 10^{27}$ cm
$R_{\mathrm{gr}} = \dfrac{\pi c}{2} \cdot t$	$= 4{,}709 \cdot 10^{10} \cdot t$	$= 7{,}055 \cdot 10^{27}$ cm
$f = \dfrac{\pi^2 l^3 c^2}{3h} \cdot \dfrac{1}{t}$	$= 0{,}999 \cdot 10^{10} \cdot \dfrac{1}{t}$	$= 6{,}670 \cdot 10^{-8}\, \dfrac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{g\,sec}^2}$

Tab. 1.

makrophysikalischen Größen findet man aus

$$N_{\mathrm{pr}}/N_{\mathrm{L}}{}^2 = 6\, \lambda_{\mathrm{p}}/\pi^3\, l \quad \text{und} \quad l/r_\lambda = \alpha \cdot m_{\mathrm{pr}}/m_{\mathrm{e}}\,,$$

wobei α die SOMMERFELDsche Feinstrukturkonstante ist, weil daraus folgt: $\alpha \cdot m_{\mathrm{pr}}/m_{\mathrm{e}} = n_v/N_{\mathrm{L}}$ in Analogie zur EDDINGTON-Zahl $Z = N_{\mathrm{pr}}/N_{\mathrm{L}}$.

Im ganzen führen die Betrachtungen zur DIRAC–JORDANschen [5] Theorie, wobei aber die Proportionalitätsfaktoren als Kombinationen der physikalischen Grundkonstanten erscheinen.

[2] A. MARCH, Naturwiss. **26**, 649 [1938].
[3] E. SCHÜCKING, Z. Phys. **137**, 595 [1954].
[4] A. HAAS, Naturwiss. **25**, 733 [1937].
[5] P. JORDAN, Schwerkraft und Weltall, Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1955.

Die Boltzmann-Gleichung für Gase mit rotierenden Molekülen

Von L. WALDMANN

Aus dem Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz

(Z. Naturforschg. **12 a**, 660—662 [1957]; eingegangen am 26. Juli 1957)

Der Zustand eines Gases mit rotierenden Molekülen ist quantentheoretisch durch eine Verteilungsmatrix $f(t, \mathfrak{r}, \mathfrak{c})$ zu beschreiben. Die zugehörige BOLTZMANN-Gleichung, siehe (5), wird angegeben für den speziellen Fall des LORENTZschen Gases.

Die klassische Fundamentalgleichung für Gase aus rotierenden Molekülen findet sich schon bei BOLTZMANN [1]. Für das spezielle Modell der rauhen Kugeln hat sie PIDDUCK [2] formuliert und ausgewertet, was auch bei CHAPMAN und COWLING [3] dargestellt ist. Das spezielle Modell harter Ellipsoide hat neuerdings CURTISS [4] behandelt.

Die quantenmechanische Version ist weniger ausgearbeitet. Zwar behandelten WANG CHANG und UHLEN-

[1] L. BOLTZMANN, Vorlesungen über Gastheorie II. Teil, 7. Abschnitt, J. A. Barth, Leipzig 1898.
[2] F. B. PIDDUCK, Proc. Roy. Soc., Lond. A **101**, 101 [1922].
[3] S. CHAPMAN u. T. G. COWLING, The Mathematical Theory of Non- Uniform Gases, Kap. 11, University Press, Cambridge 1939.
[4] C. F. CURTISS, J. Chem. Phys. **24**, 225 [1956].